

後

数 学

(120 分)

注意事項

1. 解答開始の合図があるまで、問題冊子および解答冊子の中を見てはいけません。
2. 問題は 4 問で、2 ページあります。
3. 問題冊子には、「下書き用紙 1」～「下書き用紙 4」と書いてある下書き用紙がついています。下書き用紙と問題冊子の余白は、計算などに使用することができます。
4. 解答開始後、解答冊子の表紙所定欄に受験番号、氏名をはっきり記入しなさい。
表紙にはこれら以外のことを書いてはいけません。
5. 解答は、解答冊子の指定されたページに書きなさい。解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがあります。
6. 解答冊子は、どのページも切り離してはいけません。
7. 試験終了後、問題冊子は、下書き用紙も含めて持ち帰りなさい。解答冊子は持ち帰ってはいけません。

1 (1) $a > 0, b > 0$ とする。 $\log_2 a + \log_2 b = 1$ であるとき、 $a^2 + b^2$ の最小値を求めよ。また、そのときの a, b の値を求めよ。

(2) $r > 0$ とする。楕円 $\frac{x^2}{4r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$ と直線 $y = 2x$ の 2 つの交点を結ぶ線分の長さが 4 となるときの r の値を求めよ。

(3) 数直線上の点が、硬貨を投げて表が出れば正の方向へ 1 だけ移動し、裏が出れば負の方向へ 1 だけ移動する。点の最初の位置を $X(0)$ とし、硬貨を n 回投げた後の点の位置を $X(n)$ とする。硬貨を 10 回投げたとき、 $1 \leq n \leq 9$ において $X(n) \neq X(0)$ であり、 $X(10) = X(0)$ である確率を求めよ。ただし、1 回の試行において硬貨の表が出る確率と裏が出る確率は等しいものとする。

2 2 点 $A(-1, 0, 0), B(1, \sqrt{3}, 1)$ を通る直線を ℓ とする。中心が原点で、 B を通る球面を S とする。また、 ℓ と S の B 以外の交点を C とする。

(1) S の方程式を求めよ。

(2) C の座標を求めよ。

(3) 点 P が、 S と平面 $z = 2$ が交わってできる図形上を動くとき、 $|\overrightarrow{CP}|^2$ の最小値とそのときの P の座標を求めよ。

3 a を実数の定数とする。

(1) すべての実数 x に対して, $2x^2 + ax + a > 0$ が成り立つような a の範囲を求めよ。

(2) $f(x) = x^2 + (a - 2)x + \frac{a}{x}$ ($x > 0$) とする。

(ア) a が(1)の範囲にあるとき, 関数 $f(x)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ。

(イ) $a = 2$ とする。曲線 $y = f(x)$ 上の y 座標の値が最小となる点を通り, 傾きが 2 の直線 $y = g(x)$ を考える。 $g(x) \geq f(x)$ ($x > 0$) を満たす x の区間において, 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = g(x)$ で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

4 2つの整式 $F(x) = x^5 - x^4 - 8x^3 + x^2 + 25x - 22$, $G(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x + 9$ について, $F(x)$ を $G(x)$ で割ったときの余りを $R(x)$ とする。

(1) $R(x)$ を求めよ。また, すべての実数 x に対して $R(x) > 0$ となることを示せ。

(2) $G(x) - R(x)$ を因数分解せよ。また, すべての実数 x に対して $G(x) > 0$ となることを示せ。

(3) $G(\alpha)$ が $F(\alpha)$ の約数となる整数 α の値をすべて求めよ。

問題は, このページで終わりである。