



数 学

(120 分)

注意事項

1. 解答開始の合図があるまで、問題冊子および解答冊子の中を見てはいけません。
2. 問題は 4 問で、2 ページあります。
3. 問題冊子には、「下書き用紙 1」～「下書き用紙 4」と書いてある下書き用紙がついています。下書き用紙と問題冊子の余白は、計算などに使用することができます。
4. 解答開始後、解答冊子の表紙所定欄に受験番号、氏名をはっきり記入しなさい。表紙にはこれら以外のことを書いてはいけません。
5. 解答は、解答冊子の指定されたページに書きなさい。解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがあります。
6. 解答冊子は、どのページも切り離してはいけません。
7. 試験終了後、問題冊子は、下書き用紙も含めて持ち帰りなさい。解答冊子は持ち帰ってはいけません。

1 (1) $a > 0$ とする。定積分 $\int_0^{\frac{a}{2}} x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx$ を求めよ。

(2) 1 から 6 の番号が重複なく付けられた 6 つの押しボタンがある。そのうち 3 つが「当たり」のボタンで、残り 3 つが「はずれ」のボタンになっている。これら 6 つのボタンの中から 4 つのボタンを選んで押すことを 1 回の試行として考える。ただし、1 回の試行の開始時に、3 つの「当たり」ボタンの番号は無作為に決定される。また、1 回の試行において、3 つの「当たり」ボタンをすべて押すことができた場合を「大当たり」と呼ぶ。

(ア) 1 回の試行において、「大当たり」となる確率を求めよ。

(イ) 4 回の試行を行ったとき、少なくとも 1 回が「大当たり」となる確率を求めよ。

(3) 正五角形 ABCDE を考える。点 B から直線 CD、直線 AC に下ろした垂線をそれぞれ BP、BQ とする。このとき、 $\angle CQP + \angle BCQ$ を求めよ。

2 $a > 1$ とする。曲線 $C: y = 2 \log x$ 上の点 $A(a, 2 \log a)$ における接線と法線をそれぞれ l 、 m とする。また、 l と x 軸との交点を P、 m と x 軸との交点を Q とする。ただし、 \log は自然対数である。

(1) P、Q の x 座標をそれぞれ a を用いて表せ。

(2) $PQ = 8 \log a$ となるときの a の値を求めよ。

(3) C と x 軸との交点を R、 $\angle PAR = \theta$ とする。P の x 座標が 0 となるときの $\tan \theta$ の値を求めよ。

3 a は $a > 3$ を満たす定数とする。座標平面に、原点を中心とする半径 2 の円と、点 $(a, 0)$ を中心とする半径 1 の円がある。2 つの円の両方に外接する円の半径を r 、中心を P とし、 r が変化するときの P の軌跡を C とする。

- (1) r の最小値およびそのときの P の座標を答えよ。ただし、答えのみでよい。
- (2) C と直線 $x = a$ によって囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

4 a, b は $a^2 + b^2 = 1$ を満たす実数とする。また、2 次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の 2 つの解を α, β とする。ただし、 $|\beta| \geq |\alpha|$ とする。

- (1) α, β が実数でないとき、 $|\beta|$ の最大値を求めよ。
- (2) α, β が実数のとき、 $|\beta|$ の最大値を求めよ。ただし、 $a \geq 0$ とする。

問題は、このページで終わりである。